Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Први разред – Б категорија

1. На забаву је позвано 60 људи. Очекује се да одзив гостију буде 75%. Кувар је рекао да му је потребно 5 килограма брашна како би припремио кифле масе 120 грама, тако да сваки гост који дође на забаву добије по две кифле. Међутим, кувару је грешком испоручен килограм брашна мање, те је решио да масу сваке кифле смањи за трећину. Колико посто може бити највећи одзив гостију, да би свако добио по две кифле?

2. У неком граду је убијен извесни ватрогасац Пожаревић. Полиција је ухапсила тројицу сумњивих људи: професора Алгебрића, програмера Алгоритмића и лекара Андоловића. Судија је знао да је један од њих убица. На саслушању су изјавили следеће:

(1) Алгебрић: „Нисам убица. Никада раније нисам видео Алгоритмића. Познавао сам покојног Пожаревића."

(2) Алгоритмић: „Нисам убица. Са Алгебрићем и Андоловићем сам често играо покер. Алгебрић није убица."

(3) Андоловић: „Нисам убица. Алгебрић не говори истину када каже да никада није видео Алгоритмића. Алгебрић није познавао убијеног."

Уколико је свако од њих дао две истините и једну неистиниту изјаву, откријте ко је убица.

3. Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 тежишне дужи, а T тежиште троугла ABC. Нека је тачка M средиште дужи TA_1, а тачка N средиште дужи TB_1. Ако је површина троугла ABC једнака P, одредити површину троугла MNC_1.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 2022y &= 2022, \\ \big||x| - |y|\big| &= 1. \end{aligned}$$

5. Одредити све природне бројеве a, b, c за које важи $ab = 2022$ и $a + b = c^3$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Други разред – Б категорија

1. Колико има парова целих бројева (m, n) за које важи

$$m^2 \leqslant n \leqslant m + 6?$$

2. Колико има различитих реалних бројева x за које је број $\sqrt{2022 - \sqrt{x}}$ природан?

3. Доказати да не постоје непарни цели бројеви x, y, z за које је

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2.$$

4. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 50^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 70^\circ$. Симетрала угла код темена A сече описани круг троугла ABC у тачки D. Одредити величине унутрашњих углова четвороугла $ABDC$.

5. Одредити број решења једначине

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + \ldots + x_{2021}x_{2022} + x_{2022}^2 = 1$$

у скупу целих бројева.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако су a, b, c реални бројеви, тако да је $a+b+c=0$ и $a^4+b^4+c^4=50$, одредити $ab+bc+ca$.

2. Одредити сва реална решења једначине $2^{2^x}-3\cdot 2^{2^{x-1}+1}+8=0$.

3. Стране коцке, чија је страница дужине 2022, су обојене црвеном бојом. Након тога је коцка разрезана на коцке чије су странице дужине 2, а необојене стране добијених коцки су обојене белом бојом. Одредити однос површина обојених црвеном и белом бојом.

4. У троуглу ABC угао код темена A једнак је 90°, а угао код темена C једнак је 70°. Нека је P тачка дужи AB, таква да је $\sphericalangle ACP=30^\circ$, а Q тачка дужи AC таква да је $\sphericalangle CPQ=20^\circ$. Доказати да је права BQ симетрала угла код темена B троугла ABC.

5. Одредити све целе бројеве n такве да је број $(n+1)(n+2021)(n+2022)+4041$ прост.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Први члан аритметичког низа је 24. Одредити 2022. члан тог низа, ако први, пети и једанаести члан истог низа представљају три узастопна члана геометријског низа.

2. Ако је
$$42! = 1405006ab7752879898543142606244511569936384000000000,$$
одредити непознате цифре a и b.

3. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да су сви корени полинома
$$p(x) = x^6 - 16x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 36$$
природни бројеви.

4. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем
$$\begin{array}{ccccccc} a\sin^2 x & + & \sin^2 y & + & \sin^2 z & = & 1, \\ \cos^2 x & + & a\cos^2 y & + & \cos^2 z & = & 2, \\ \cos 2x & + & \cos 2y & + & a\cos 2z & = & -2a^2 + a + 2. \end{array}$$

5. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг. Ако је $AB = CD = 1$, $BC = DE = \sqrt{2}$ и $\sphericalangle ACE = 30^\circ$, одредити дужину дужи EA.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. Очекивани број гостију је $0,75 \cdot 60 = 45$. Пошто је предвиђено да сваки од гостију добије по две кифле, потребно је 90 кифли, односно укупна маса кифли је $90 \cdot 0,12$ килограма. Слично, уколико је број гостију x, маса кифле 0,08 килограма и сваки гост добије по 2 кифле, укупна маса кифли ће бити $2x \cdot 0,08$ килограма. Како кувар у првом случају располаже са 5, а у другом са 4 килограма брашна, следи $\frac{90 \cdot 0,12}{5} = \frac{2x \cdot 0,08}{4}$, одакле је $x = 54$, односно највећи одзив гостију може бити $\frac{54}{60} = 90\%$.

2. Друге и треће изјаве Алгебрића и Андоловића су контрадикторне, па како је свако од њих дао две истините и једну неистиниту изјаву, њихове прве изјаве су истините, односно они нису убице. Следи да је убица Алгоритмић (друга и трећа његова изјава нису контрадикторне са изјавама Алгебрића и Андоловића).

3. Нека је са $P(XYZ)$ означена површина троугла XYZ. Онда је $P(A_1B_1C_1) = \frac{P}{4}$, $P(TA_1B_1) = P(TB_1C_1) = P(TC_1A_1) = \frac{1}{3} \cdot P(A_1B_1C_1) = \frac{P}{12}$ (тачка T је тежиште $\triangle A_1B_1C_1$), као и $P(TMN) = \frac{P(TA_1B_1)}{4} = \frac{P}{48}$. Важи $P(TNC_1) = \frac{1}{2} \cdot P(TB_1C_1) = \frac{P}{24}$ (пошто је $TB_1 = 2 \cdot TN$, а висине које одговарају страницама TB_1 и TN у $\triangle TB_1C_1$ и $\triangle TNC_1$, редом, су једнаке), а аналогно је $P(TMC_1) = \frac{1}{2} \cdot P(TC_1A_1) = \frac{P}{24}$. Како тачка T припада унутрашњости $\triangle MNC_1$, следи $P(MNC_1) = P(TNC_1) + P(TMC_1) + P(TMN) = \frac{P}{24} + \frac{P}{24} + \frac{P}{48} = \frac{5}{48} \cdot P$.

4. Важи $x = 2022(1 - y)$.

Ако је $y \geqslant 1$, онда је $y > 0$ и $x \leqslant 0$, па друга једначина система постаје $|-x-y| = 1$, тј. $|x+y| = 1$. Следи $|2022 - 2021y| = 1$. Ако је $y \in \left(\frac{2022}{2021}, \infty\right)$, добија се $2021y - 2022 = 1$, па је $y = \frac{2023}{2021}$ и $x = -\frac{4044}{2021}$, што јесте решење наведеног система. Ако је $y \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right]$, онда је $2022 - 2021y = 1$, па је $y = 1$ и $x = 0$, што је решење наведеног система.

Ако је $y < 1$, онда је $x > 0$. Ако је $y \in (-\infty, 0)$, друга једначина система постаје $|x+y| = 1$, па је $|2022 - 2021y| = 1$, одакле је $2022 - 2021y = 1$, тј. $y = 1$, што не даје решење, пошто је у овом случају $y < 0$. Ако је $y \in [0, 1)$, друга једначина система постаје $|x-y| = 1$, па је $|2022 - 2023y| = 1$. Ако је $y \in \left(\frac{2022}{2023}, 1\right)$, добија се $2023y - 2022 = 1$, па је $y = 1$, што не даје решење, пошто је у овом случају $y < 1$. Ако је $y \in \left[0, \frac{2022}{2023}\right]$, добија се $2022 - 2023y = 1$, па је $y = \frac{2021}{2023}$ и $x = \frac{4044}{2023}$, што је решење наведеног система.

Дакле, решење наведеног система је $(x, y) \in \left\{(0,1), \left(-\frac{4044}{2021}, \frac{2023}{2021}\right), \left(\frac{4044}{2023}, \frac{2021}{2023}\right)\right\}$ (Тангента, M1695).

5. Како је $ab = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, ако је $a \leqslant b$, следи $(a,b) \in \{(1,2022), (2,1011), (3,674), (6,337)\}$, па је $a + b \in \{2023, 1013, 677, 343\}$. Једини број из последњег скупа који је трећи степен природног броја је $343 = 7^3$, па је $c = 7$, односно решење наведеног система је $(a,b,c) \in \{(6,337,7), (337,6,7)\}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

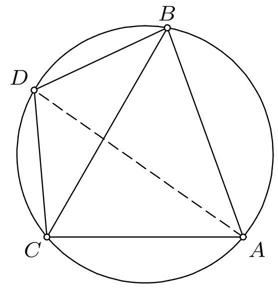
1. Како је $m^2 \leqslant m+6$, односно $(m-3)(m+2) \leqslant 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, мора бити $m \in \{-2,-1,0,1,2,3\}$, а за такве m бројева n за које је $m^2 \leqslant n \leqslant m+6$ има $7+m-m^2$. Следи да парова који задовољавају наведене неједнакости има $\sum\limits_{m=-2}^{3}(7+m-m^2) = 1+5+7+7+5+1 = 26$.

2. Мора бити $0 \leqslant x$ и $\sqrt{x} \leqslant 2022$. Ако је $\sqrt{2022-\sqrt{x}} = n \in \mathbb{N}$, онда је $\sqrt{x} = 2022-n^2$. Ако је $n^2 > 2022$, стране последње једначине су различитих знака, па она нема решења. Са друге стране, за свако $n \in \mathbb{N}$ за које је $2022-n^2 \geqslant 0$ је $x = (2022-n^2)^2$ решење последње једначине. Следи да број x са наведеним особинама постоји ако и само ако је n природан број за који је $n^2 \leqslant 2022$, односно ако је $1 \leqslant n \leqslant 44$, па тражених бројева има 44 (Тангента, М1818).

3. Из наведеног услова следи $2x^2+2xy+2xz = 2yz$, тј. $x^2+xy+xz = yz$, одакле је $(x+y)(x+z) = 2yz$. Ако су x, y, z непарни цели бројеви, онда $2 \mid x+y$ и $2 \mid x+z$, па $4 \mid (x+y)(x+z)$, а са друге стране $4 \nmid 2yz$, па следи наведено тврђење.

4. Збир углова у $\triangle ABC$ је 180°, па је $\sphericalangle BCA = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CAB = 60^\circ$. Како је AD симетрала угла BAC, важи $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 35^\circ$. Следи $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = 35^\circ$, на основу једнакости периферијских углова над тетивом CD, па је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$. Аналогно, на основу једнакости периферијских углова над тетивом BD је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = 35^\circ$, па је $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCA = 35^\circ + 60^\circ = 95^\circ$. Коначно, како је збир углова у четвороуглу једнак 360°, следи $\sphericalangle BDC = 360^\circ - \sphericalangle DCA - \sphericalangle CAB - \sphericalangle ABD = 360^\circ - 95^\circ - 70^\circ - 85^\circ = 110^\circ$.

Дакле, величине унутрашњих углова четвороугла $ABDC$ су 70°, 85°, 110° и 95°.



Опш–22–2Б4

5. Једначина је еквивалентна са $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + \ldots + 2x_{2021}x_{2022} + 2x_{2022}^2 = 2$, односно са $x_1^2 + \sum\limits_{n=2}^{2022}(x_{n-1}+x_n)^2 + x_{2022}^2 = 2$, тј. са $\sum\limits_{n=1}^{2023} y_n^2 = 2$, где је $y_1 = x_1$, $y_n = x_{n-1}+x_n$ за $2 \leqslant n \leqslant 2022$ и $y_{2023} = x_{2022}$. Притом су бројеви $(y_n)_{n=1}^{2023}$ цели ако и само ако су бројеви $(x_n)_{n=1}^{2022}$ цели. Такође, избор бројева $(x_n)_{n=1}^{2022}$ једнозначно одређује избор бројева $(y_n)_{n=1}^{2023}$ за које важи $\sum\limits_{n=1}^{2023}(-1)^n y_n = 0$, а важи и обрнуто, било који избор бројева $(y_n)_{n=1}^{2023}$ за које важи $\sum\limits_{n=1}^{2023}(-1)^n y_n = 0$ једнозначно одређује избор бројева $(x_n)_{n=1}^{2022}$ (из веза $x_1 = y_1$ и $x_n = y_n - x_{n-1}$ за $2 \leqslant n \leqslant 2022$ се добијају $(x_n)_{n=1}^{2022}$, а наведени услов обезбеђује да је и једначина $y_{2023} = x_{2022}$ задовољена).

Како је $\sum\limits_{n=1}^{2023} y_n^2 = 2$ и како су y_n цели, за $1 \leqslant n \leqslant 2023$, следи да је $y_i^2 = y_j^2 = 1$ за неке $1 \leqslant i < j \leqslant 2023$, док је $y_k = 0$ за $k \notin \{i,j\}$. Следи да је $y_i, y_j \in \{-1,1\}$, међутим, због услова $\sum\limits_{n=1}^{2023}(-1)^n y_n = 0$, избор y_i једнозначно одређује y_j, а како је утврђено, такав избор једнозначно одређује избор целих $(x_n)_{n=1}^{2022}$ који задовољавају наведену једначину. Пар (i,j) при услову $1 \leqslant n \leqslant 2023$ се може изабрати на $\binom{2023}{2}$ начина, након тога се на 2 начина може изабрати $y_i \in \{-1,1\}$, а то по утврђеном једнозначно одређује сваки $(x_n)_{n=1}^{2022}$ који задовољава услове задатка, па је број решења наведене једначине у скупу целих бројева једнак $2 \cdot \binom{2023}{2} = 2022 \cdot 2023$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Из $a+b+c=0$ следи $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$, па је $a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c)$, односно, уз услове задатка, следи $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=25$. Како је $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$, следи $(ab+bc+ca)^2=25$, а пошто је $ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\leqslant 0$, следи $ab+bc+ca=-5$.

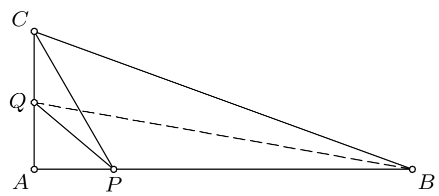
Коментар. Постоје реални бројеви са наведеним особинама. На пример, бројеви $a=\sqrt{5}$, $b=-\sqrt{5}$, $c=0$ задовољавају наведене услове.

2. Ако је $y=2^{x-1}$, следи $2^{2y}-3\cdot 2^{y+1}+8=0$, тј. $2^{2y}-6\cdot 2^y+8=0$, односно $(2^y-2)(2^y-4)=0$, па је $2^y\in\{2,4\}$. Ако је $2^y=2$, следи $y=1$, тј. $2^{x-1}=1$, па је $x=1$. Ако је $2^y=4$, следи $y=2$, тј. $2^{x-1}=2$, па је $x=2$.

3. Површина обојена црвеном бојом једнака је површини коцке странице 2022, односно $6\cdot 2022^2$. Након разрезивања, добија се 1011^3 коцки странице 2, њихова укупна површина је $1011^3\cdot 6\cdot 2^2=1011\cdot 6\cdot 2022^2$, па је површина обојена белом бојом једнака $1011\cdot 6\cdot 2022^2-6\cdot 2022^2$. Дакле, однос површина обојених црвеном и белом бојом једнак је $\frac{6\cdot 2022^2}{1011\cdot 6\cdot 2022^2-6\cdot 2022^2}=\frac{1}{1011-1}=\frac{1}{1010}$ (Тангента, М1756).

4. Из $\triangle ABC$ је $\frac{BA}{BC}=\sin 70^\circ$. Важи $\sphericalangle PQA=\sphericalangle QPC+\sphericalangle PCQ=50^\circ$, па из $\triangle APQ$ следи $\frac{AQ}{PQ}=\cos 50^\circ=\sin 40^\circ$. Применом синусне теореме у $\triangle QPC$ следи $\frac{QP}{CQ}=\frac{\sin\sphericalangle PCQ}{\sin\sphericalangle QPC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$, па је

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{CQ} &= \frac{AQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{CQ}=\sin 40^\circ\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\\ &= 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cdot\frac{1}{2\sin 20^\circ}\\ &= \cos 20^\circ=\sin 70^\circ=\frac{BA}{BC}.\end{aligned}$$



Опш–22–3Б4

Дакле, важи $\frac{AQ}{CQ}=\frac{BA}{BC}$, што значи да је BQ симетрала $\sphericalangle ABC$.

5. Како бројеви 1, 2021, 2022 дају остатке 1, 2, 0, редом, при дељењу са 3, барем један од бројева $n+1$, $n+2021$, $n+2022$ је дељив са 3, па је и $(n+1)(n+2021)(n+2022)+4041$ дељив са 3. Како је у питању прост број, мора бити једнак 3, односно важи

$$(n+1)(n+2021)(n+2022)=-4038=-2\cdot 3\cdot 673.$$

Следи да је бар један од бројева $n+1$, $n+2021$, $n+2022$ дељив са 673. Уколико то није $n+1$, онда је $\left|(n+2021)(n+2022)\right|\geqslant 673\cdot 672$, те не би могла да важи добијена једнакост, па $673\mid n+1$. Како је $n+1<n+2021<n+2022$ и како је производ наведена три броја негативан, $n+1$ мора бити негативан, а $n+2021$ и $n+2022$ су истог знака. Ако је $n+2022$ негативан, пошто су у питању цели бројеви, онда важи $n+2022\leqslant -1$, $n+2021\leqslant -2$ и $n+1\leqslant -2022$, па је $\left|(n+1)(n+2021)(n+2022)\right|\geqslant 2\cdot 2022>4038$, што је немогуће. Следи да је $n+2022>n+2021>0$, па како су у питању цели бројеви, важи $n\geqslant -2020$. Ако је $n\geqslant -2018$, онда је $n+2021\geqslant 3$ и $n+2022\geqslant 4$, па како $673\mid n+1$, следи $\left|(n+1)(n+2021)(n+2022)\right|\geqslant 3\cdot 4\cdot 673>4038$, што је немогуће. Следи $n\in\{-2020,-2019\}$, па како $673\mid n+1$, мора бити $n=-2020$, што јесте број са наведеним својствима.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Ако је уочени аритметички низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и d његов корак, важи $a_n = a_1+(n-1)d$ за $n \in \mathbb{N}$. По условима задатка је $a_1a_{11} = a_5^2$, односно $24\cdot(24+10d) = (24+4d)^2$, па је $d^2-3d = 0$, односно $d \in \{0,3\}$. Ако је $d = 0$, онда је $a_{2022} = 24$, а ако је $d = 3$, онда је $a_{2022} = 24+2021\cdot 3 = 6\,087$.

2. Како је 42! дељив са 9, следи да је збир цифара овог броја дељив са 9, одакле следи да $9 \mid a+b+187$, односно $9 \mid a+b-2$. Како је 42! дељив са 11, следи да је број добијен као разлика збира цифара које се налазе на непарним и збира цифара које се налазе на парним местима у декадном запису дељив са 11, одакле следи да $11 \mid a-b+33$, односно $11 \mid a-b$. Како су a и b цифре, важи $-9 \leqslant a-b \leqslant 9$, па како $11 \mid a-b$, следи $a = b$. Како $9 \mid a+b-2$, следи $9 \mid a-1$, па како су a и b цифре, мора бити $a = b = 1$.

3. По Вијетовим правилима је $x_1+\ldots+x_6 = 16$ и $x_1\cdot\ldots\cdot x_6 = 36$, где су $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_6$ корени полинома p. Како су у питању природни бројеви, морају бити из скупа $\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. Следи да је $x_1 \in \{3,4,6,9,12,18,36\}$. Не може бити $x_1 = 36$, као ни $x_1 = 18$, пошто би онда збир корена био већи од 16. Ако је $x_1 = 12$, онда је $x_2\cdot\ldots\cdot x_6 = 3$, па је $x_2 = 3$ и $x_3 = \ldots = x_6 = 1$. Међутим, онда је $x_1+\ldots+x_6 = 18 \neq 16$, па у овом случају не постоји полином са наведеним особинама. Ако је $x_1 = 9$, онда је $x_2\cdot\ldots\cdot x_6 = 4$, па је или $x_2 = 4$, $x_3 = \ldots = x_6 = 1$ или $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, што у првом случају доводи до $x_1+\ldots+x_6 = 17 \neq 16$, а у другом доводи до решења $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (9,2,2,1,1,1)$. Ако је $x_1 = 6$, онда је $x_2\cdot\ldots\cdot x_6 = 6$, па је или $x_2 = 6$, $x_3 = \ldots = x_6 = 1$ или $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, што у другом случају доводи до $x_1+\ldots+x_6 = 14 \neq 16$, а у првом доводи до решења $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (6,6,1,1,1,1)$. Ако је $x_1 = 4$, онда је $x_2 = x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, па је $x_1+\ldots+x_6 = 13 \neq 16$, а ако је $x_1 = 3$, онда је $x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = 2$, $x_5 = x_6 = 1$, па је $x_1+\ldots+x_6 = 12 \neq 16$, односно ни у овим случајевима не постоји полином са наведеним особинама.

Дакле, постоји два полинома са наведеним особинама,

$$\begin{array}{rcl}(x-9)(x-2)^2(x-1)^3 &=& x^6-16x^5+82x^4-196x^3+241x^2-148x+36\\ \text{и}\quad (x-6)^2(x-1)^4 &=& x^6-16x^5+90x^4-220x^3+265x^2-156x+36,\end{array}$$

па је $a \in \{82,90\}$ (Тангента, М1803).

4. Ако је $p = \sin^2 x \in [0,1]$, $q = \sin^2 y \in [0,1]$, $r = \sin^2 z \in [0,1]$, коришћењем $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$ и $\cos 2t = 1-2\sin^2 t$, добија се систем линеарних једначина

$$ap+q+r = 1,\quad p+aq+r = a,\quad p+q+ar = a^2.$$

Сабирањем добијених једначина добија се $(a+2)(p+q+r) = 1+a+a^2$, што за $a = -2$ доводи до $0 = 3$, односно у том случају нема решења, док се за $a \neq -2$ добија $p+q+r = \frac{1+a+a^2}{2+a}$. Одузимањем добијене једначине од осталих једначина система, следи

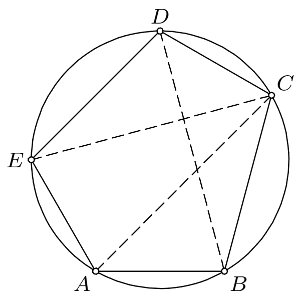
$$(a-1)p = 1-\tfrac{1+a+a^2}{2+a} = \tfrac{1-a^2}{2+a},\quad (a-1)q = \tfrac{a-1}{2+a},\quad (a-1)r = \tfrac{(a-1)(a+1)^2}{2+a}.$$

Уколико је $a = 1$, систем се своди на $p+q+r = 1$, одакле је $(p,q,r) = (m,n,1-m-n)$ за $m,n \in \mathbb{R}$. Како је $p,q,r \in [0,1]$, мора бити $m,n \geqslant 0$ и $m+n \leqslant 1$, па је решење полазног система $(x,y,z) \in \big\{(\pm\arcsin\sqrt{m}+2k_1\pi, \pm\arcsin\sqrt{n}+2k_2\pi, \pm\arcsin\sqrt{1-m-n}+2k_3\pi) \mid m,n \in [0,1], m+n \in [0,1], k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{Z}\big\}$.

Уколико је $a \neq 1$ и $a \neq -2$, добија се $p = -\frac{a+1}{a+2}$, $q = \frac{1}{a+2}$, $r = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. Међутим, како су $p,q,r \in [0,1]$ и како $p \geqslant 0$ доводи до $a \in (-2,-1]$, а $q \leqslant 1$ до $a \in (-\infty,-2)\cup[-1,\infty)$, следи да мора бити $a = -1$. У том случају је $(p,q,r) = (0,1,0)$ тј. $(x,y,z) \in \big\{\big(k_1\pi, \frac{\pi}{2}+2k_2\pi, k_3\pi\big) \mid k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{Z}\big\}$.

Друго решење. Као и у првом решењу, сменом $p = \sin^2 x \in [0,1]$, $q = \sin^2 y \in [0,1]$, $r = \sin^2 z \in [0,1]$ се добија систем линеарних једначина $ap+q+r = 1$, $p+aq+r = a$, $p+q+ar = a^2$, а одговарајуће детерминанте система су $\Delta = (a+2)(a-1)^2$, $\Delta_p = -(a+1)(a-1)^2$, $\Delta_q = (a-1)^2$, $\Delta_r = (a-1)^2(a+1)^2$, па примена Крамерове теореме доводи до дискусије аналогне оној која је спроведена у првом решењу.

5. Нека су $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ углови над тетивама AB и BC, редом, у описаном кругу петоугла $ABCDE$, полупречника R. Онда су централни углови над AB и CD једнаки 2α, над BC и DE једнаки 2β, а над AE једнак 60°, па је $4(\alpha+\beta)+60^\circ = 360^\circ$, односно $\alpha+\beta = 75^\circ$. Како је $\sin\alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{1}{2R}$, $\sin\beta = \frac{BC}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}R}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4R^2}} = \frac{\sqrt{4R^2-1}}{2R}$ и $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{2R^2}} = \frac{\sqrt{2R^2-1}}{\sqrt{2}R}$, следи $\cos(\alpha+\beta) = \cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, односно $\frac{\sqrt{(2R^2-1)(4R^2-1)}}{2\sqrt{2}R^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}R^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, тј. $\sqrt{(2R^2-1)(4R^2-1)} = 1+(\sqrt{3}-1)R^2$. Квадрирањем добијене везе добија се $8R^4-6R^2+1 = 1+2(\sqrt{3}-1)R^2+(\sqrt{3}-1)^2R^4$, одакле, сређивањем и како је $R \neq 0$, следи $\left(8-(\sqrt{3}-1)^2\right)R^2 = 4+2\sqrt{3}$, тј. $R^2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{8-4+2\sqrt{3}} = 1$. Како је $R > 0$, следи $R = 1$, па како је AE тетива над централим углом од 60°, следи $AE = R = 1$.



Опш–22–4Б5

Друго решење. Нека је $\sphericalangle BCA = \varphi$ и $\sphericalangle CAB = \psi$. Како је $AB = CD$, важи $\sphericalangle DEC = \varphi$, а како је $BC = DE$, важи $\sphericalangle ECD = \psi$, па су $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ подударни. Аналогно, њима је подударан и $\triangle DCB$. Како је $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \varphi - \psi$ и $\sphericalangle BCD = \varphi + 30^\circ + \psi$, следи $\varphi + \psi = 75^\circ$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 105^\circ$. Из косинусне теореме, примењене на $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$, следи $AC^2 = EC^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 105^\circ = 3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos 105^\circ = 2+\sqrt{3}$, јер је, као у првом решењу, $\cos 105^\circ = -\cos 75^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, па из косунусне теореме примењене на $\triangle ACE$ следи $AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2 \cdot AC \cdot EC \cdot \cos 30^\circ = (2-\sqrt{3})AC^2 = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, односно $AE = 1$.

Коментар. Из првог решења видимо да је $EA = 1$ и ако је $\sphericalangle ACE = 30^\circ$, било које две од AB, BC, CD, DE једнаке 1, а преостале две једнаке $\sqrt{2}$.